* 学术论文 *

R_0-代数的 R_0-语义集上的拓扑*

张家录[1] 王国俊[2]

1. 湘南学院数学系，郴州 423000；2. 陕西师范大学数学研究所，西安 710062

摘要 以 Ω_M 记 R_0-代数 M 到 R_0-单位区间的全体赋值之集. 证明一个同构于一族全序的至多可数的 R_0-代数的直积的子 R_0-代数 M 是赋值决定序的，即 $x \leqslant y$ 当且仅当 $\forall v \in \Omega_M$，$v(x) \leqslant v(y)$. 然后通过一种自然的方式在 Ω_M 上引入 Fuzzy 拓扑 δ，研究拓扑 δ 及其相应的截拓扑的性质. 建立 R_0-代数的 Fuzzy 拓扑表现定理和 Loomis-Sikorski 定理.

关键词 R_0-代数 R_0-赋值 Fuzzy 拓扑 截拓扑 紧空间 滤子

随着 Fuzzy 逻辑研究的深入，一些新的 Fuzzy 逻辑系统被提出，其中 Hajek 提出的基础系统 BL[1]，王国俊提出的形式系统 $\mathscr{L}^*$[2-5]是重要的. 在这些逻辑系统的研究中，相关的代数系统（BL-代数，R_0-代数）起到了重要作用，因而针对这些系统的专门研究是很有意义的工作，已有许多学者在这方面取得了成果[1-5]. 利用拓扑结构来刻画 Bool 代数（一种与经典逻辑系统相关的代数系统）是一种重要的方法，有著名的 Stone 表现定理和 Loomis-Sikorski 定理[6]. 文献[7]讨论了 MV-代数的 Fuzzy 集合表示，给出了 MV-代数的 Loomis-Sikorski 定理. 而文献[4]则利用 Fuzzy 拓扑研究了正则蕴涵格的结构和性质，但由于还不知道 BL-代数和 R_0 代数是否是正则蕴涵格，因此对这些代数系统的正则性（本文为了避免和代数系统的原有的一些正则性概念相混淆，称这种正则性为赋值决定序）的研究，进一步利用拓扑结构来研究 BL-代数和 R_0-代数等 Fuzzy 逻辑代数系统的结构和性质，从而建立不同的数学分支间的联系，这样既丰富了代数、拓扑等数学分支的研究内容，同时对 Fuzzy 逻辑理论和应用的研究也是非常有意义的. 本文研究 R_0-代数的 R_0-语义集上的 Fuzzy 拓扑以及相应的分明截拓扑，并较细致研究这些拓扑的结构与性质，从而从拓扑的角度来反映出 R_0-代数及其抽象语义的性质.

1 R_0-代数及其赋值

定义 1.1[2] 设 M 是 $(\neg, \vee, \rightarrow)$ 型代数，如果存在偏序 $\leqslant$，使得 $(M, \leqslant)$ 是有界分配格，$\vee$ 是关于 $\leqslant$ 的上确界运算，$\neg$ 是关于 $\leqslant$ 的逆序对合对应，且以下条件成立，则称 M 为 R_0-代数.

(R1) $\neg a \rightarrow \neg b = b \rightarrow a$,

(R2) $1 \rightarrow a = a$,

(R3) $a \rightarrow a = 1$,

(R4) $(b \rightarrow c) \vee ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) = (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$,

(R5) $a \rightarrow (b \rightarrow c) = b \rightarrow (a \rightarrow c)$,

(R6) $a \rightarrow b \vee c = (a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow c)$,
$a \rightarrow b \vee c = (a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow c)$,

(R7) $(a \rightarrow b) \vee ((a \rightarrow b) \rightarrow \neg a \vee b) = 1$.

2005-11-23 收稿，2006-03-01 收修改稿

* 国家自然科学基金重点项目（批准号：10331010）和湖南省教育厅科学研究项目（批准号：04C630）资助

E-mail：zjl0735@163.com

如果M还是全序的，则称M为全序R_0代数. 作为代数系统，可以自然地引入子R_0代数、R_0代数同态，R_0-代数族的直积等概念.

记$a\otimes b=\neg(a\to\neg b)$，$a\oplus b=\neg a\to b$. 关于$R_0$代数的性质及其他未加说明的术语和符号见文献[2].

例1.2 区间$[0,1]$关于自然序和$\neg$, $\vee$, $\to$构成R_0-代数，称之为R_0单位区间，其中$\neg a=1-a$, $a\vee b=\max\{a,b\}$,

$$a\to b=\begin{cases}1, & a\leqslant b,\\ (1-a)\vee b, & a>b.\end{cases}$$

例1.3 设$X\neq\varnothing$, $M=[0,1]^X$，这里$[0,1]$为R_0单位区间，M上的序，运算$\neg$, $\vee$, $\to$都按点式定义，即对A, $B\in M$规定：

$$A\leqslant B \text{ 当且仅当对每个 } x\in X, A(x)\leqslant B(x),$$

$(\neg A)(x)=1-A(x)$, $(A\vee B)(x)=A(x)\vee B(x)$, $(A\to B)(x)=A(x)\to B(x)$, $x\in X$. 则M成为R_0代数，称之为R_0-方体.

文献[3]已证明了，当M为全序R_0代数时，则M中的蕴涵$\to$必为如下形式的R_0-蕴涵算子，即当$a\leqslant b$时，$a\to b=1$，否则$a\to b=\neg a\vee b$.

文献[3]在R_0-代数上引进了MP滤子的概念并证明了任何一个R_0代数都同构于一族全序R_0-代数乘积的子代数. R_0代数M的一个子集F叫做一个MP滤子，如果(i)$1\in F$, (ii)若a, $a\to b\in F$，则$b\in F$. 一个MP滤子称为素MP滤子，如果(iii)若$a\vee b\in F$，则$a\in F$或$b\in F$；称为真MP滤子，如果$F\neq M$. 一个真MP滤子F称为极大的，如果对M的任何MP滤子$G\supseteq F$，有$G=F$或$G=M$.

定义1.4 设M是R_0代数，$[0,1]$为R_0单位区间. 称同态$v:M\to[0,1]$为M的一个赋值. 即M的赋值v满足：对任意的a, $b\in M$, $v(\neg a)=1-v(a)$; $v(a\vee b)=\max\{v(a),v(b)\}$; $v(a\to b)=v(a)\to v(b)=R_0(v(a),v(b))$. 以下用$\Omega_M$记$M$的全体赋值之集.

命题1.5 设M为R_0-代数，$v\in\Omega_M$,

(1) v保序，保$\wedge$, $\otimes$, $\oplus$等运算且$v(1)=1$, $v(0)=0$.

(2) 若M全序，且存在$v_0\in\Omega_M$，使$v_0(a)<v_0(b)$，则$a<b$.

(3) 若M全序，且对$a\neq b$，有$v(a)=v(b)$，则必有$v(a)=v(b)=1$，或$v(a)=v(b)=0$.

(4) 若M全序，u是保序、保非的单射且$u(1)=1$，则u亦保蕴涵，即$u\in\Omega_M$.

注1.6 按照Tarski的观点，一个完备格L上的抽象语义S是L上的一个非空子集，若$1\notin S$，这里1是L的最大元. 显然$\Omega_M\subseteq[0,1]^M$，且由$\forall v\in\Omega_M$, $v(0)=0$知$1\notin\Omega_M$，所以Ω_M也是$[0,1]^M$上的抽象语义.

2 R_0-代数的赋值决定序性质

定义2.1 设M是R_0-代数，若对a, $b\in M$，当$\forall v\in\Omega_M$均有$v(a)\leqslant v(b)$时，有$a\leqslant b$，则称M是赋值决定序的.

引理2.2 设R_0-代数M是赋值决定序的，a, $b\in M$且$a\neq b$，则存在$v\in\Omega_M$，使$v(a)\neq v(b)$.

命题2.3 设M是R_0-代数，则以下两个条件等价：

(i) 对a, $b\in M$，当$\forall v\in\Omega_M$, $v(a)\leqslant v(b)$时，有$a\leqslant b$.

(ii) 对$a\in M$，当$\forall v\in\Omega_M$, $v(a)=v(1)$时，有$a=1$.

定理2.4 设M_0是全序的R_0-代数，则M_0是赋值决定序的当且仅当$\forall a\in M_0$, $0<a<1$, $S(a)=\{x\mid x\in M_0, \neg a\leqslant x\leqslant a\}$可序嵌入到$(0,1)$中.

证明 必要性. 设全序R_0代数M_0是赋值决定序的，则$\forall a\in M_0$, $0<a<1$, $\exists v_0\in\Omega_{M_0}$，使$v_0(a)\neq v_0(1)=1$. 因此，若记$S(a)=\{x\mid x\in M_0, \neg a\leqslant x\leqslant a\}$，则$\forall x_1$, $x_2\in S(a)$, $x_1\neq x_2$，有$v_0(x_1)\neq v_0(x_2)$. 否则，若$v_0(x_1)=v_0(x_2)$，则由命题1.5，有$v_0(x_1)=v_0(x_2)=0$或1. 而x_1, $x_2\in S(a)$，应有$0<v_0(\neg a)\leqslant v_0(x_1)=v_0(x_2)\leqslant v_0(a)<1$. 矛盾. 于是，$v_0$限制在$S(a)$上是单射. 所以$S(a)$可序嵌入到$(0,1)$中.

充分性. 假设M_0不是赋值决定序的，则存在a, b, $\forall v\in\Omega_{M_0}$, $v(a)\leqslant v(b)$，但$a\leqslant b$不成立，即$a>b$. 记$y_0=a\to b$，则$0<y_0<1$. 由已知条件，$S(y_0)$可序嵌入到$(0,1)$中，即存在$S(y_0)$到$(0,1)$的严格增加映射ϕ.

可以要求上述的 ϕ 在 $S(y_0)$ 上亦保持非运算. 这是因为，若记 $S^-(y_0)=\{x \mid x\in S(y_0), x\leqslant\neg x\}$，$S^+(y_0)=\{x \mid x\in S(y_0), \neg x\leqslant x\}$，则 $S^-(y_0)\cup S^+(y_0)=S(y_0)$，$S^+(y_0)=\{\neg x \mid x\in S^-(y_0)\}$ 且 $S^-(y_0)\cap S^+(y_0)$ 等于空集 $\varnothing$ 或单点集 $\{e\}$. 如果 $\phi(x)$ 在 $S(y_0)$ 上不保持非运算，则令

$$\phi_1(x)=\frac{\phi(x)}{2\bigvee\limits_{x\in S^-(y_0)}\phi(x)}.$$

当 $S^-(y_0)\cap S^+(y_0)=\{e\}$ 时，作

$$\phi_2(x)=\begin{cases}\phi_1(x), & x\in S^-(y_0)-\{e\}\\ \dfrac{1}{2}, & x=e\\ \neg\phi_1(\neg x), & x\in S^+(y_0)-\{e\},\end{cases}$$

当 $S^-(y_0)\cap S^+(y_0)=\varnothing$ 时，作

$$\phi_2(x)=\begin{cases}\phi_1(x), & x\in S^-(y_0)\\ \neg\phi_1(\neg x), & x\in S^+(y_0),\end{cases}$$

则易验证 ϕ_2 在 $S(y_0)$ 上严格增加且保持非运算.

构造映射 $v_0:M_0\to[0,1]$，

$$v_0(x)=\begin{cases}1, & x>y_0\\ \phi(x), & \neg y_0\leqslant x\leqslant y_0\\ 0, & x<\neg y_0,\end{cases}$$

易验证 v_0 是赋值，即 $v_0\in\Omega_{M_0}$. 但由 $v_0(y_0)=\varphi(y_0)<1$，即 $v_0(a\to b)=v_0(a)\to v_0(b)<1$，知 $v_0(a)\leqslant v_0(b)$ 不成立，即 $v_0(a)>v_0(b)$. 与已知 $\forall v\in\Omega_{M_0}$，$v(a)\leqslant v(b)$ 矛盾. 所以 M_0 是赋值决定序的.

推论 2.5[8] 设 M_0 是全序的至多可数(有限或可数)的 R_0- 代数，则 M_0 是赋值决定序的.

命题 2.6 设 $M_i(i\in I)$ 是一族赋值决定序的 R_0- 代数，则 $M=\prod\limits_{i\in I}M_i$ 也是赋值决定序的.

证明 假设 $M=\prod\limits_{i\in I}M_i$ 不是赋值决定序的 R_0- 代数. 则存在 $a=(a_i)_{i\in I}$，$b=(b_i)_{i\in I}$，使虽然有 $\forall v\in\Omega_M$，$v(a)\leqslant v(b)$，但 $a\leqslant b$ 不成立. 由 $a\leqslant b$ 不成立，知 $\exists i_0\in I$ 使 $a_{i_0}\leqslant b_{i_0}$ 不成立. 另一方面，$\forall v^{(i_0)}\in\Omega_{M_{i_0}}$ 易证 $v^{(i_0)}\circ\pi_{i_0}\in\Omega_M$，其中 $\pi_{i_0}:M\to M_{i_0}$ 是 M 到 M_{i_0} 的投影映射，即 $\pi_{i_0}((a_i)_{i\in I})=a_{i_0}$. 因此 $v^{(i_0)}\circ\pi_{i_0}(a)\leqslant v^{(i_0)}\circ\pi_{i_0}(b)$，即 $v^{(i_0)}(a_{i_0})\leqslant v^{(i_0)}(b_{i_0})$. 因 M_{i_0} 是赋值决定序的，故又得 $a_{i_0}\leqslant b_{i_0}$. 矛盾. 所以 M 是赋值决定序的.

命题 2.7 设 R_0- 代数 M_1，M_2 同构，M_1 是赋值决定序的，则 M_2 也是赋值决定序的.

证明 设 M_1，M_2 同构，同构映射为 φ，则易证 $v\in\Omega_{M_2}\Leftrightarrow v\circ\varphi\in\Omega_{M_1}$. 设 a，$b\in M_2$，$\forall v\in\Omega_{M_2}$，有 $v(a)\leqslant v(b)$，则由 φ 是同构知，$\exists a_1$，b_1 使 $\varphi(a_1)=a$，$\varphi(b_1)=b$，于是 $v\circ\varphi(a_1)\leqslant v\circ\varphi(b_1)$. 因 M_1 是赋值决定序的，故 $a_1\leqslant b_1$. 所以 $a=\varphi(a_1)\leqslant\varphi(b_1)=b$. 即证 M_2 是赋值决定序的.

命题 2.8 设 M_1 是赋值决定序的 R_0- 代数 M 的子 R_0 代数，则 M_1 也是赋值决定序的.

证明 易证 $\{v|_{M_1}:v\in\Omega_M\}\subseteq\Omega_{M_1}$. 此处 $v|_{M_1}$ 表示 v 在 M_1 上的限制. 设 a，$b\in M_1$，$\forall u\in\Omega_{M_1}$，$u(a)\leqslant u(b)$，因此 $\forall v\in\Omega_M$，有 $v|_{M_1}(a)\leqslant v|_{M_1}(b)$，即 $v(a)\leqslant v(b)$. 因 M 是赋值决定序的，故 $a\leqslant b$. 即证 M_1 是赋值决定序的.

由推论 2.5 和命题 2.6—2.8，可得

定理 2.9 设 M 为 R_0- 代数，如果 M 同构于一族全序的至多可数的 R_0- 代数的直积的子 R_0- 代数，则 M 是赋值决定序的.

推论 2.10 如果 M 是至多可数的 R_0- 代数，则 M 是赋值决定序的.

证明 设 $\mathscr{F}=\{F \mid F$ 是 M 的素 MP 滤子$\}$，则 M 可嵌入 $M^*=\prod\limits_{F\in\mathscr{F}}(M/F)$，其嵌入映射 φ 为[2]

$$\varphi:M\to M^*,\quad x\mapsto([x]_F)_{F\in\mathscr{F}}.\tag{1}$$

由于 M 是至多可数的，从而 M/F 是全序的至多可数的 R_0- 代数，因此，由定理 2.9 知 M 是赋值决定序的.

定理 2.11 设 M 是一族至多可数集合的直积，若 M 是 R_0- 代数，则 M 是赋值决定序的.

证明 设 $M=\prod\limits_{j\in J}M_j$，则 $\pi_j(M)=M_j$ 是至多可数的 R_0- 代数，其中 $\pi_j:M\to M_j$，$\pi_j((a_j)_{j\in J})=a_j$ 是投影映射. 由推论 2.10 知 M_j 是赋值决定序的，从而由定理 2.9 得 M 是赋值决定序的.

虽然一般的 R_0- 代数不一定是赋值决定序的，但每个 R_0- 代数 M 都有一商代数 $\widetilde{M}$，$\widetilde{M}$ 是赋值决定序的 R_0- 代数.

定理 2.12 设 M 为 R_0- 代数，在 M 上定义关系 $\approx$ 如下：设 $a, b\in M$，规定

$$a \approx b \quad 当且仅当 \quad \forall v \in \Omega_M,\ v(a) = v(b),$$

则 $\approx$ 是 M 上的同余关系，且商代数 $\widetilde{M}=M/\approx$ 是赋值决定序的 R_0- 代数.

证明 易证 $\approx$ 是 M 上的同余关系. 以 $\bar{a}$ 记 a 所在的同余类. 在 $\widetilde{M}=M/\approx$ 上引进偏序关系 $\leqslant$，规定 $\bar{a}\leqslant\bar{b}$ 当且仅当 $\forall v\in\Omega_M$，$v(a)\leqslant v(b)$. 易证 $\leqslant$ 确为 $\widetilde{M}$ 上的偏序，$\overline{a\vee b}$，$\overline{a\wedge b}$ 分别是 $\bar{a}$ 与 $\bar{b}$ 在 $(\widetilde{M},\leqslant)$ 中的上确界与下确界，即 $\bar{a}\vee\bar{b}=\overline{a\vee b}$，$\bar{a}\wedge\bar{b}=\overline{a\wedge b}$ 且 $\bar{1}$ 和 $\bar{0}$ 分别是 $(\widetilde{M},\leqslant)$ 中的最大元和最小元.

$\widetilde{M}$ 上的 $\neg$，$\to$ 运算规定如下：$\neg\bar{a}=\overline{\neg a}$，$\bar{a}\to\bar{b}=\overline{a\to b}$.

由 $\bar{a}\wedge(\bar{b}\vee\bar{c})=\overline{a\wedge(b\vee c)}=\overline{(a\wedge b)\vee(a\wedge c)}=(\bar{a}\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge\bar{c})$ 知 $(\widetilde{M},\leqslant)$ 是有界分配格.

由 $\leqslant$ 的定义知当 $\bar{a}\leqslant\bar{b}$ 时，$\neg\bar{a}\geqslant\neg\bar{b}$，又 $\neg\neg\bar{a}=\overline{\neg\neg a}=\bar{a}$. 所以 $\neg$ 是 $(\widetilde{M},\leqslant)$ 上的逆序对合对应.

至于 R_0- 代数定义中的 7 个条件易验证是成立的. 所以 $\widetilde{M}$ 是 R_0- 代数. 而 $\widetilde{M}$ 显然是赋值决定序的.

注 2.13 定义 1.4 中并没有说明赋值 v 是存在的，即 $\Omega_M\neq\varnothing$. 首先，对全序 R_0- 代数，令 v 是如下的映射：当 $\neg a<a$ 时，$v(a)=1$；当 $\neg a=a$ 时，$v(a)=1/2$；当 $\neg a>a$ 时，$v(a)=0$. 则易验证 v 是 M 的赋值. 其次，如果 M 是一般的 R_0 代数，则从命题 2.6 到命题 2.8 的证明过程知，$\Omega_M\neq\varnothing$.

3 Ω_M 上的 Fuzzy 拓扑

定义 3.1 设 (X,δ) 为 Fuzzy 拓扑空间. 如果 δ 有基 β（对有限交封闭）使 β 成为 R_0- 方体的子代数，则称 (X,δ) 为 R_0 Fuzzy 拓扑空间，简称 R_0 空间. β 称为 R_0- 基.

定理 3.2 设 M 为 R_0- 代数，定义映射 $\varphi: M\to[0,1]^{\Omega_M}$ 如下：

$$\varphi(a)(v) = v(a),\quad v\in\Omega_M,\ a\in M. \qquad (2)$$

令 $\beta=\{\varphi(a)\mid a\in M\}$，则以 β 为基生成的 Fuzzy 拓扑 δ 是 R_0- 空间，记为 (Ω_M,δ). β 为 R_0 基.

证明 取 $1\in M$，则 $\varphi(1)(v)=v(1)=1$，即 $\varphi(1)$ 是 Ω_M 上的最大 Fuzzy 集. $\forall v\in\Omega_M$，

$$(\varphi(a)\wedge\varphi(b))(v)=\varphi(a)(v)\wedge\varphi(b)(v)= v(a)\wedge v(b)=v(a\wedge b)=\varphi(a\wedge b)(v),$$

故 $\varphi(a)\wedge\varphi(b)=\varphi(a\wedge b)$. 即 β 关于有限交封闭. 以 β 为基可以在 Ω_M 上生成一个 Fuzzy 拓扑 δ.

任取 $\varphi(a)$，$\varphi(b)\in\beta$，则

(1) 由 $\neg(\varphi(a))(v)=1-\varphi(a)(v)=1-v(a)=\neg v(a)=v(\neg a)=\varphi(\neg a)(v)$，知 $\neg(\varphi(a))=\varphi(\neg a)\in\beta$. 即 β 关于 $\neg$ 运算封闭.

(2) $(\varphi(a)\vee\varphi(b))(v)=\varphi(a)(v)\vee\varphi(b)(v)=v(a)\vee v(b)=v(a\vee b)=\varphi(a\vee b)(v)$，故 $\varphi(a)\vee\varphi(b)=\varphi(a\vee b)$. 即 β 关于（有限）$\vee$ 运算封闭.

(3) $(\varphi(a)\to\varphi(b))(v)=\varphi(a)(v)\to\varphi(b)(v)=v(a)\to v(b)=v(a\to b)=\varphi(a\to b)(v)$，故 $\varphi(a)\to\varphi(b)=\varphi(a\to b)$. 即 β 关于 $\to$ 运算封闭.

由 (1)—(3) 知 β 是 R_0 方体 $[0,1]^{\Omega_M}$ 的子代数. 因此 β 是 R_0 基，(Ω_M,δ)（由 β 生成）是 R_0- 空间.

定理 3.3 （表现定理）设 M 是一族至多可数的集合的直积，则 M 为 R_0 代数当且仅当 M 同构于某 R_0 空间的 R_0- 基.

证明 充分性. 设 M 同构于某 R_0- 空间的 R_0 基，因此 M 显然是 R_0 代数.

必要性. 设 M 是一族至多可数的集合的直积且是 R_0 代数，由定理 3.2，$\beta=\{\varphi(a)\mid a\in M\}$ 可生成 Ω_M 上的 R_0- Fuzzy 拓扑 δ，β 是 R_0- 基.

设 $a, b\in M$，$a\neq b$，由定理 2.11 知，M 是赋值决定序的，从而存在 $v\in\Omega_M$ 使 $v(a)\neq v(b)$，因此 $\varphi(a)\neq\varphi(b)$，即 $\varphi: M\to[0,1]^{\Omega_M}$ 是单射，从而 $\varphi: M\to\beta$ 是双射. 设 $a\leqslant b$，$\forall v\in\Omega_M$，$v(a)\leqslant v(b)$，故 $\varphi(a)\leqslant\varphi(b)$，即 φ 保序. 由 M 的赋值决定序性质知 φ^{-1}：$\beta\to M$ 也保序. 而定理 3.2 已证 φ 保持 $\neg$，$\vee$，$\to$. 所以 $\varphi: M\to\beta$ 是同构，即 $M\cong\beta$.

一般来说，R_0- 空间 (M,δ) 不一定是覆盖式紧空间，如下面的例子：

例 3.4 令 $M=[0,1]-\left\{\frac{1}{2}\right\}$，则 M 是 R_0- 单

位区间的子 R_0- 代数. 任取 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right)$，任取单调增加的双射 $\mu_t:\left(\frac{1}{2},1\right]\to(t,1]$，作 $v_t:M\to[0,1]$ 为

$$v_t(a)=\begin{cases}\mu_t(a), & a\in\left(\frac{1}{2},1\right],\\ 1-\mu_t(1-a), & a\in\left[0,\frac{1}{2}\right).\end{cases}$$

则 v_t 是 M 上的赋值. 易证凡 M 上的赋值都具有 v_t 的这种形式或者是下述的 v_0：

$$v_0(a)=\begin{cases}1, & a\in\left(\frac{1}{2},1\right],\\ 0, & a\in\left[0,\frac{1}{2}\right).\end{cases}$$

令 $a_n=1-\frac{1}{n+2}\,(n=1,2,\cdots)$，则 $\forall v\in\Omega_M$，$\bigvee_{n=1}^{\infty}\varphi(a_n)(v)=\bigvee_{n=1}^{\infty}v(a_n)=1$. 故 $\{\varphi(a_n)\mid n=1,2,\cdots\}$ 是 $[0,1]^{\Omega_M}$ 的开覆盖. 显然它没有有限的子覆盖，即 Fuzzy 拓扑空间 (Ω_M,δ) 不是覆盖式紧空间.

4 Ω_M 上的分明拓扑

从 Ω_M 上的 Fuzzy 拓扑 δ 可以导出 Ω_M 上的一个分明拓扑，即截拓扑[9]，将此分明拓扑记为 $\mathscr{U}$.

定理 4.1 $(\Omega_M,\mathscr{U})$ 是正则的 T_1 空间，从而也是 Hausdorff 空间. 当 M 可数时，$(\Omega_M,\mathscr{U})$ 是第二可数的.

证明 根据截拓扑的定义，δ 的截拓扑 $\mathscr{U}$ 由子基

$$S(\delta)=\{f\mid f\in\delta,\lambda\in[0,1]\}\tag{3}$$

生成. 由于 β 是 δ 的子基，任取 $f\in\delta$，则 β 有子集 $\{\varphi(a_i)\mid i\in I\}$，使 $f=\vee\{\varphi(a_i)\mid i\in I\}$. 易知 $f(v)>\lambda$ 当且仅当存在 $i\in I$ 使 $\varphi(a_i)(v)>\lambda$. 所以

$$f_\lambda=\bigcup\{(\varphi(a_i))_\lambda\mid i\in I\}.\tag{4}$$

由(3)与(4)式知

$$S(\beta)=\{(\varphi(a))_\lambda\mid a\in M,\lambda\in[0,1]\}\tag{5}$$

也构成 $\mathscr{U}$ 的子基. 进一步，(5)式中的 λ 还可限制为仅取有理数，因此当 M 可数时，$\mathscr{U}$ 有可数子基，从而也有可数基，故此时 $(\Omega_M,\mathscr{U})$ 是第二可数空间.

设 u 与 v 是 Ω_M 中的不同点，则有 $a\in M$ 使 $u(a)\neq v(a)$. 不妨设 $u(a)<v(a)$. 取 Fuzzy 开集 $\varphi(a)$ 并取实数 $\lambda\in(u(a),v(a))$，则 $(\varphi(a))_\lambda\in\mathscr{U}$ 且 $v\in(\varphi(a))_\lambda$，$u\notin(\varphi(a))_\lambda$. 又这时 $v(\neg a)<u(\neg a)$. 任取 $\mu\in(v(\neg a),u(\neg a))$，则 $(\varphi(\neg a))_\mu$ 是 u 的不包含 v 的开邻域. 所以 $(\Omega_M,\mathscr{U})$ 是 T_1 空间. 最后证明 $(\Omega_M,\mathscr{U})$ 的正则分离性[12].

设 $v\in\Omega_M$，V 是 v 的任一开邻域，由(5)是 $\mathscr{U}$ 的子基知存在 $a_k\in M$ 和 $\lambda_k\in[0,1]\,(k=1,2,\cdots,l)$ 使

$$v\in\bigcap\{(\varphi(a_k))_{\lambda_k}\mid k=1,2,\cdots,l\}\subseteq V.\tag{6}$$

这时，由 $v\in(\varphi(a_k))_{\lambda_k}\,(k=1,2,\cdots,l)$ 知 $v(a_k)>\lambda_k$，从而存在实数 $\mu_k\,(k=1,2,\cdots,l)$ 满足

$$v(a_k)>\mu_k>\lambda_k,\ k=1,2,\cdots,l.\tag{7}$$

令

$$H_k=\{u\in\Omega_M\mid\varphi(\neg a_k)(u)\leqslant 1-\mu_k\},$$

则由 $\{u\in\Omega_M\mid\varphi(\neg a_k)(u)>1-\mu_k\}$ 为 $\mathscr{U}$ 中的开集知 H_k 为 $\mathscr{U}$ 中的闭集 $(k=1,2,\cdots,l)$. 又

$$\varphi(\neg a_k)(u)\leqslant 1-\mu_k\quad\text{当且仅当}$$
$$\varphi(a_k)(u)\geqslant\mu_k,\quad k=1,2,\cdots,l.$$

所以由(7)式得

$$v\in(\varphi(a_k))_{\mu_k}\subseteq H_k\subseteq(\varphi(a_k))_{\lambda_k},\ k=1,2,\cdots,l.\tag{8}$$

令

$$G=\bigcap_{k=1}^{l}(\varphi(a_k))_{\mu_k},\quad H=\bigcap_{k=1}^{l}H_k,$$

则 G 与 H 分别是 $(\Omega_M,\mathscr{U})$ 中的开集和闭集. 由(6)与(8)式得

$$v \in G \subseteq H \subseteq \bigcap_{k=1}^{l} (\varphi(a_k))_{\lambda_k} \subseteq V. \tag{9}$$

由(9)式就证明了$(\Omega_M, \mathscr{U})$的正则分离性. 由于$(\Omega_M, \mathscr{U})$是正则的T_1空间, 从而$(\Omega_M, \mathscr{U})$也是Haudorff空间.

设$S=\{p_1, p_2, \cdots\}$, $[0, 1]$是R_0单位区间, $F(S)$是由S生成的$(\neg, \vee, \rightarrow)$型自由代数. $F(S)$中的元叫做命题公式. 从$F(S)$到$[0, 1]$的$(\neg, \vee, \rightarrow)$型同态叫$F(S)$的赋值, 其全体之集记作$\Omega$. 由$F(S)$是由$S$生成的自由代数知, v由其在S上的限制所惟一确定, 记此限制为$v|s$. 反过来, 任一映射v: $S\rightarrow[0, 1]$均可惟一地开拓为一个同态$F(S)\rightarrow[0, 1]$. 设$A, B\in F(S)$, 若$\forall v\in\Omega$, $v(A)=v(B)$, 则称A与B逻辑等价, 记作$\approx$. 易证$\approx$是关于$(\neg, \vee, \rightarrow)$的同余关系且商$F(S)/\approx$构成$R_0$代数[2,3], 称为Lindenbaum-代数, 记作M_R. $\forall A\in F(S)$, 以$[A]$表示A所在的同余类, 则$\forall v\in\Omega$, v在$[A]$中各公式处有相同的值. 所以可以定义$v^*: M_R\rightarrow[0, 1]$为

$$v^*([A]) = v(A), A \in F(S), \tag{10}$$

则v^*为$(\neg, \vee, \rightarrow)$型同态. 为简便计, 也称$v^*$为$M_R$上的一个赋值且仍以$v$表示$v^*$. 以$\Omega$表示从$M_R$到$[0, 1]$的全体赋值之集.

定理4.2 $(\Omega, \mathscr{U})$是紧空间.

证明 设$\{v_n \mid n\in D\}$是$(\Omega, \mathscr{U})$中的网, 其中D是定向集, 则$\{v_n \mid n\in D\}$也是$[0, 1]^{M_R}$中的网. 由于$[0, 1]$按通常的拓扑是紧空间, 所以$[0, 1]^{M_R}$也是紧空间, 于是$\{v_n \mid n\in D\}$有子网$\{v_{n_i} \mid i\in I\}$收敛于v_0. 下面证明在$(\Omega, \mathscr{U})$中也有$\{v_{n_i} \mid i\in I\}$收敛于v_0. 任取v_0的开邻域V, 则与(6)式类似有

$$v_0 \in \bigcap \{(\varphi([A_k]))_{\lambda_k} \mid k = 1, 2, \cdots, l\} \subseteq V. \tag{11}$$

由(11)式, 得

$$v_0([A_k]) > \lambda_k, \quad k = 1, 2, \cdots, l.$$

于是

$$v_0 \in \pi^{-1}_{[A_1]}((\lambda_1, 1]) \cap \cdots \cap \pi^{-1}_{[A_l]} \cdot ((\lambda_l, 1]) \in [0, 1]^{M_R},$$

这里$\pi_{[A_k]}$是从$[0, 1]^{M_R}$到$[0, 1]$的投影映射. 由于$\{v_{n_i} \mid i\in I\}$在$[0, 1]^{M_R}$中收敛于v_0, 故存在i_0, 当$i_0\leqslant i$时,

$$v_{n_i} \in \pi^{-1}_{[A_1]}((\lambda_1, 1]) \cap \cdots \cap \pi^{-1}_{[A_l]} \cdot ((\lambda_l, 1]) \in [0, 1]^{M_R}.$$

从而

$$u_{n_i}([A_k]) > \lambda_k, \quad k = 1,2, \cdots, l.$$

因此

$$u_{n_i} \in \bigcap \{(\varphi([A_K]))_{\lambda_k} \mid k = 1, 2, \cdots, l\} \subseteq V.$$

这表明$\{v_{n_i} \mid i\in I\}$在$(\Omega_M, \mathscr{U})$中也收敛于v_0. 所以$(\Omega, \mathscr{U})$是紧空间.

当Fuzzy拓扑空间的截拓扑空间是紧空间时, Lowen称该Fuzzy拓扑空间为超紧空间[10], 文献[11]中证明了超紧空间必为良紧空间. 所以由定理4.2得.

推论4.3 (Ω, δ)是良紧空间.

5 R_0-代数的Loomis-Sikorski定理

定理5.1 $\forall v\in\Omega_M$, $v^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)=\left\{a \mid a\in M, v(a)\in\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right\}$是$M$的极大$MP$滤子.

证明 首先证明$v^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$是$MP$滤子. 显然$1\in v^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$; 若$a, a\rightarrow b\in v^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$, 则$v(b)\geqslant v(a\otimes(a\rightarrow b))=v(a)\otimes v(a\rightarrow b)>\frac{1}{2}$, 从而$b\in v^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$.

其次证明是极大MP滤子. 设$v^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)\subseteq F$. 若$F\neq v^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$, 则$\exists x_0\in F$但$x_0\notin v^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$, 即$v(x_0)\leqslant\frac{1}{2}$. 于是$v(x_0^2)=v(x_0)$

$\otimes v(x_0) \leqslant \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0$，因此 $v(\neg x_0^2) = 1$，从而 $\neg x_0^2 \in v^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subseteq F$. 又 $x_0^2 \in F$，所以 $0 = \neg x_0^2 \otimes x_0^2 \in F$，即证 $F = M$.

定理 5.2 若 F_0 是 M 的一个极大 MP 滤子，则存在赋值 v 使 $F_0 = v^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$.

证明 由于 F_0 是极大 MP 滤子，从而 F_0 是素 MP 滤子[2]，于是 M/F_0 是全序集，因此存在赋值 $v_{F_0}: M/F_0 \to [0, 1]$ 且 $v_{F_0}(a_{F_0}) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow a_{F_0} > \neg a_{F_0}$. 因为 M 可保序嵌入 $\prod_{F \in \mathscr{F}} (M/F)$，其嵌入映射 ψ 为

$$\psi: M \to \prod_{F \in \mathscr{F}} (M/F), \quad x \mapsto (x_F)_{F \in \mathscr{F}},$$

其中 $\mathscr{F} = \{F \mid F \text{ 是 } M \text{ 的素 } MP \text{ 滤子}\}$. 易证 $v = v_{F_0} \circ \pi_{F_0} \circ \psi$ 是 M 的赋值，此处 π_{F_0} 是 $\prod_{F \in \mathscr{F}} (M/F)$ 到 M/F_0 的投影映射. 当 $a \in F_0$ 时，$a_{F_0} = 1_{F_0}$，故

$$\begin{aligned} v(a) &= v_{F_0} \circ \pi_{F_0} \circ \psi(a) = v_{F_0}(\pi_{F_0}((a_F)_{F \in \mathscr{F}})) \\ &= v_{F_0}(1_{F_0}) > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

当 $a \notin F_0$ 时，因 F_0 是极大 MP 滤子，故 $\langle F_0 \cup \{a\} \rangle = M$. 由生成 MP 滤子的意义和 $0 \notin F_0$，知 $\exists a_1, a_2, \cdots, a_m \in F_0$，使 $0 \geqslant a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_m \otimes a^k$. 于是 $0_{F_0} = (a_1)_{F_0} \otimes (a_2)_{F_0} \otimes \cdots \otimes (a_m)_{F_0} \otimes (a^k)_{F_0} = (a^k)_{F_0} = (a_{F_0})^k$. 从而 $v_{F_0}((a_{F_0})^k) = v_{F_0}(0_{F_0}) \leqslant \frac{1}{2}$，因此 $v_{F_0}(a_{F_0}) \leqslant \frac{1}{2}$. 所以

$$\begin{aligned} v(a) &= v_{F_0} \circ \pi_{F_0} \circ \psi(a) = v_{F_0}(\pi_{F_0}((a_F)_{F \in \mathscr{F}})) \\ &= v_{F_0}(a_{F_0}) \leqslant \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

即证 $\exists v \in \Omega_M$，使 $F_0 = v^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$.

在定理 5.2 的证明中，v 不一定是惟一的，但注意到任何一个全序 R_0- 代数 M/F 必有如下形式的一个赋值

$$v_F^{(0)}(a_F) = \begin{cases} 1, & \neg a_F < a_F \\ \frac{1}{2}, & \neg a_F = a_F \\ 0, & a_F < \neg a_F, \end{cases}$$

或

$$v_F^{(0)}(a_F) = \begin{cases} 1, & \neg a_F < a_F \\ 0 & a_F < \neg a_F, \end{cases}$$

相应的 M 中的赋值 $v_F^{(0)} \circ \pi_F \circ \psi$ 记作 v_F^*. 这样对任何一个极大 MP 滤子 F，存在惟一的赋值 $v_F^* \in \Omega_M$ 与之对应，记此对应为 τ.

下面的定理可看作 R_0- 代数的 Loomis-Sikorski 定理.

定理 5.3 设 M 是 R_0- 代数，$\mathscr{M}(M)$ 是 M 的全体极大 MP 滤子集. 则存在 R_0- 方体的子 R_0- 代数 M^* 和 M 到 M^* 的同态 η，且 $\forall x, y \in M$，x 和 y 有相同的同态象当且仅当以下两个条件成立：$\forall F \in \mathscr{F}$，(1) $x \oplus x \in F \Leftrightarrow y \oplus y \in F$，(2) $\neg x \oplus \neg x \in F \Leftrightarrow \neg y \oplus \neg y \in F$.

证明 根据(2)式，作映射

$$\begin{gathered} \eta: M \to [0, 1]^{\mathscr{M}(M)}, \\ \eta(x)(F) = \varphi(x)(\tau(F)) = \varphi(x)(v_F^*) = v_F^*(x). \end{gathered} \tag{12}$$

令 $M^* = \{\eta(x) \mid x \in M\}$. 类似于定理 3.2 的证明可证 M^* 是 $[0, 1]^{\mathscr{M}(M)}$ 的子 R_0- 代数. 任取 $x, y \in M$，$F \in \mathscr{M}(M)$，则

(1) $\eta(\neg x)(F) = v_F^*(\neg x) = 1 - v_F^*(x) = 1 - \eta(x)(F)$. 故 $\eta(\neg x) = 1 - \eta(x)$.

(2) $\eta(x \vee y)(F) = v_F^*(x \vee y) = v_F^*(x) \vee v_F^*(y) = \eta(x)(F) \vee \eta(y)(F) = (\eta(x) \vee \eta(y))(F)$. 故 $\eta(x \vee y) = \eta(x) \vee \eta(y)$.

(3) $\eta(x \to y)(F) = v_F^*(x \to y) = v_F^*(x) \to v_F^*(y) = \eta(x)(F) \to \eta(y)(F) = (\eta(x) \to \eta(y))(F)$. 故 $\eta(x \to y) = \eta(x) \to \eta(y)$. 由(1)—(3)知 η 是 M 到 M^* 的同态.

如果 x 和 y 有相同的同态象，即 $\forall F \in \mathscr{M}(M)$，$\eta(x)(F) = \eta(y)(F)$. 从而 $v_F^*(x) = v_F^*(y)$，则 $v_F^0(x) \circ \pi_F \circ \psi(x) = v_F^0(x) \circ \pi_F \circ \psi(y)$，即 $v_F^0(\pi_F((x_F)_{F \in \mathscr{F}})) = v_F^0(\pi_F((y_F)_{F \in \mathscr{F}}))$. 因此 $v_F^0(x_F) = v_F^0(y_F)$. 于是以下条

件成立：(1)′ $\neg x_F \leqslant x_F \Leftrightarrow \neg y_F \leqslant y_F$，(2)′ $x_F \leqslant \neg x_F \Leftrightarrow y_F \leqslant \neg y_F$. 由 M/F 上偏序的意义知上面两式又可写成 (1)″ $\neg x \to x \in F \Leftrightarrow \neg y \to y \in F$，(2)″ $x \to \neg x \in F \Leftrightarrow y \to \neg y \in F$. 上面两式即(1) $x \oplus x \in F \Leftrightarrow y \oplus y \in F$，(2) $\neg x \oplus \neg x \in F \Leftrightarrow \neg y \oplus \neg y \in F$. 上面的推导过程是可逆的，所以结论成立.

参 考 文 献

1 Hajek M. Metamathematics of Fuzzy Logic. Dordrecht: Kluwer Adacemic Publishers, 1998, 27—107

2 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理. 北京：科学出版社，2003，161 207

3 裴道武，王国俊. 形式系统 $\mathscr{L}^*$ 的完备性. 中国科学，E辑，2002，32(1)：56—64

4 王国俊. 蕴涵格及其 Fuzzy 拓扑表现定理. 数学学报，1999，42(1)：159—168

5 程国胜，王国俊. R_0-代数及其基本结构. 数学物理学报，1999，19(5)：584—588

6 Sikorski R. Boolean Algebras. Berlin: Springer-Verlag, 1964

7 Mundici D. Tensor products and the Loomis-Sikorski theorem for *MV*-agebras. Adv Appl Math, 1999, 22: 227—248

8 Wang G J, Chin K S, Dang C Y. A unified approximate reasoning theory suitable for both proposition calculus system $\mathscr{L}^*$ and predicate calculus system $\mathscr{K}^*$. Science in Chinese, Ser F, 2005, 48(1): 1 14

9 王国俊. L-fuzzy 拓扑空间论. 西安：陕西师范大学出版社，1988，51—133，244—291

10 Lowen R. A comparison of different compactness notions in fuzzy topological space. J Math Anal Appl, 1978, 64(3): 446—454

11 Wang G J. A new fuzzy compactness defined by fuzzy nets. J Math Anal Appl, 1983, 94(1): 1—23

12 Kelley J L. General Topology. New York: Springer-Verlag, 1975

“ITER 模拟研究国际研讨会”在北京大学召开

可控聚变能是解决人类能源需求的重要途径.“国际热核试验堆”(ITER—International Thermonuclear Experimental Reactor)研究计划总投资上百亿欧元. 中国已将 ITER 合作列入国家中长期科技发展规划，并将贡献 ITER 总投资的 9%，并同时加强国内的基地建设和人才培养. 理论和模拟研究是磁约束和惯性约束核聚变的重要组成部分，也是我国比较薄弱的方面，需要加快发展.

2006年5月15—19日在北京大学举行“ITER 模拟研究国际会议”. 会议由中国科学院合肥等离子研究所、西南物理研究院、北京大学共同主办，来自美国、法国、意大利、日本等国的20多位国际著名专家及国内60多位核聚变领域的专家学者济济一堂，交流聚变理论和模拟的最新进展和国际范围的工作计划，这样世界范围高水平的聚变模拟会议是首次在中国举行. 霍裕平、贺贤土、潘垣等院士出席会议并作报告. 会议结束时筹建了国内相关单位代表组成的 CISI(China ITER Simulation Initiative)工作组和咨询组(挂靠在北京大学)，并决定由参加会议的国内外学者共同编写和出版聚变模拟白皮书.

北京大学筹备成立“北京大学聚变研究中心(Center for Fusion Studies, PKU)”，承担国家相关科学研究和人才培养任务.

(供稿：周 辉)